Corrigé proposé par
Guy Barat

Problème — Mines-Ponts PSI II, 2019

I – Quelques exemples

1. La fonction $g(x) = \mathrm{e}^x$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \big[-\mathrm{e}^{-x}\big]_0^{x\to+\infty} = 1$, donc g est bien une densité. On réalise une intégration par parties. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m_{n+1}(g) = \int_0^{+\infty} \underbrace{x^{n+1}}_{u}\,\underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{v'}\,\mathrm{d}x = \big[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\big]_0^{x\to+\infty} - \int_0^{+\infty} (n+1)x^n\big(-\mathrm{e}^{-x}\big)\,\mathrm{d}x = (n+1)m_n(g).$$

La convergence du crochet (vers 0) montre précisément que « *si* $m_n(g)$ *existe, alors* $m_{n+1}(g)$ *existe aussi et vérifie la relation* $m_{n+1}(g) = (n+1)m_n(g)$ ». Par une récurrence simple immédiate, $m_n(g)$ existe pour tout entier naturel n et $m_n(g) = n!$.

2. Pour tout entier naturel n, la fonction $x \longmapsto x^n\varphi(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, paire et $0 \leqslant x^n\mathrm{e}^{-x^2/2} \leqslant x^n\mathrm{e}^{-x/2}$ si $x \geqslant 1$, d'où l'existence des moments $m_n(\varphi)$ d'après celle de $m_n(g)$ montrée à la question précédente. On peut aussi raisonner directement :

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}_+^* : x^{n+2}\mathrm{e}^{-x^2/2} = \exp\big(\underbrace{(n+2)\ln x - x^2/2}_{\sim -x^2/2}\big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \therefore \qquad x^n\varphi(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} \mathfrak{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto x^{2p+1}\varphi(x)$ est impaire, donc $m_{2p+1}(\varphi) = 0$ comme intégrale *convergente* (il faut le rappeler) d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0.

4. On réalise une intégration par parties. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^{2p-2}}_{u'}\underbrace{\mathrm{e}^{-x^2/2}}_{v}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2p-1}}{2p-1}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2p-1}}{2p-1}\big(-x\mathrm{e}^{-x^2/2}\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2p-1}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \qquad \therefore$$

$$\begin{aligned} m_{2p}(\varphi) &= (2p-1)m_{2(p-1)}(\varphi) = (2p-1)(2p-3)m_{2(p-2)}(\varphi) = \cdots = (2p-1)(2p-3)\times\cdots\times 3\times 1\times m_0(\varphi)\\ &= \frac{(2p)!}{2p(2p-2)\times\cdots\times 2}\times m_0(\varphi) = \frac{(2p)!}{2^p\,p!}\times m_0(\varphi) = \frac{(2p)!}{2^p\,p!}.\end{aligned}$$

La validité de l'intégration par parties est automatiquement assurée par la question 2.

5. La fonction $a(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ est continue positive et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} a(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\lim_{x\to+\infty}\arctan x - \lim_{x\to-\infty}\arctan x\right) = 1$, donc a est une densité. Son moment d'ordre 1 est infini par divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ par comparaison avec $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

II – Théorème de Stone-Weierstraß

6. La formule du binôme de Newton donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \big(x+(1-x)\big)^n = 1$.

7. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,x)$ (loi binomiale de paramètre nx), alors $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx.$$

Une alternative algébrique consiste à poser $S(x,y) = (x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$. Alors,

$$(1) \qquad x\,\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^ky^{n-k} = nx(x+y)^{n-1},$$

d'où l'égalité demandée en évaluant $x\,\dfrac{\partial S}{\partial x}(x,1-x)$.

Si l'on ne reconnaît pas l'espérance d'une loi binomiale et si l'on ne pense pas à utiliser la dérivation des polynômes à deux variables, la relation s'obtient enfin par le calcul : la relation $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, valable pour tout $k \geqslant 1$, donne

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\\ &\overset{(j=k-1)}{=} nx\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^j(1-x)^{n-1-j} = nx\big(x+(1-x)\big)^{n-1} = nx.\end{aligned}$$

8. Avec les notations probabilistes de la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \mathbf{E}(X^2) \overset{\text{(Koenig)}}{=} \mathbf{V}(X) + \mathbf{E}(X^2) = nx(1-x) + n^2x^2 = nx + n(n-1)x^2.$$

L'approche polynomiale consiste à réappliquer l'opérateur $x\dfrac{\partial\cdot}{\partial x}$, donc de l'appliquer à (1), ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^ky^{n-k} = x\big[n(x+y)^{n-1} + n(n-1)x(x+y)^{n-2}\big], \tag{2}$$

d'où l'égalité demandée en évaluant (2) en $y = 1-x$.

On peut enfin rester dans les calculs sur les coefficients binomiaux et réutiliser la transformation de la question 7 pour écrire

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= nx\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k}\\ &\overset{(j=k-2)}{=} n(n-1)x^2\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}x^j(1-x)^{n-2-j} = n(n-1)x^2\big(x+(1-x)\big)^{n-2} = n(n-1)x^2,\end{aligned}$$

et l'on conclut comme avec les polynômes en reprenant la somme de la question précédente.

9. La somme se calcule facilement à partir des sommes des questions 6 à 8. On note S_i la somme de la question i :

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = S_8 - 2nxS_7 + n^2x^2S_6 = \big[nx + n(n-1)x^2\big] - 2n^2x^2 + n^2x^2 = nx(1-x).$$

Une étude de fonction montre immédiatement que la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $x \longmapsto x(1-x)$ est positive et admet son maximum en $1/2$, où elle prend la valeur $1/4$. On peut donc prendre $C = 1/4$, ce choix étant optimal. On peut aussi se passer d'étude de fonction et prendre la majoration évidente $C = 1$, ce qui répond à la question et suffit pour la suite.

10. L'énoncé invite implicitement à donner une expression sommatoire de $B_n(f) - f$ et à séparer la somme donnant le polynôme $B_n(f)$ selon la partition $[\![0,n]\!] = X \uplus Y$, soit

$$\begin{aligned}B_n(f)(x) - f(x) &\overset{(Q.6)}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right]\\ &= \sum_{k\in X}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right] + \sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right] = S_X + S_Y\\ |S_X| &\leqslant \sum_{k\in X}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon\sum_{k\in X}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \overset{(Q.6)}{=} \varepsilon\\ |S_Y| &\leqslant \sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant 2\,\|f\|_\infty\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \qquad \therefore\end{aligned}$$

$$\big|B_n(f)(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

11. Le plus efficace, comme en début de partie, est de procéder de manière probabiliste. On note que

$$Y = \left\{k \in [\![0,n]\!]\,;\,\left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha\right\} = \{k \in [\![0,n]\!]\,;\,|k-nx| > \alpha\} = \left\{k \in [\![0,n]\!]\,;\,(k-nx)^2 > \alpha^2\right\}. \tag{3}$$

Alors, toujours avec $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,x)$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\mathbf{P}\left(|X-\mathbf{E}(X)|>n\alpha\right)\leqslant\frac{\mathbf{V}(X)}{(n\alpha)^2}=\frac{nx(1-x)}{\alpha^2n^2}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to\infty}S_Y=0$, ce qui, couplé avec la majoration de $|S_X|$ donne bien $\|B_n-f\|_\infty\leqslant 2\varepsilon$ à.p.c.r.

Plus directement, mais cela revient peu ou prou à redémontrer l'inégalité de Markov pour un loi binomiale, ce qui explique que l'on trouve exactement la même majoration, on utilise la majoration obtenue à la question 9 en partant de (3) :

$$\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\sum_{k\in Y}\frac{(k-nx)^2}{\alpha^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{1}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{1}{4n\alpha^2}.$$

III – Le problème des moments sur $[0,1]$

12. Soit l'application Ψ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\Psi(P)=\displaystyle\int_0^1\big(f(x)-g(x)\big)P(x)\,\mathrm{d}x$. Elle est bien définie (intégrales de fonctions continues sur un segment) et, par linéarité de l'intégrale, c'est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$. Pour $n\in\mathbb{N}$, l'égalité $m_n(f)=m_n(g)$ traduit que $\Psi(X^n)=0$. Ainsi, si $m_n(f)=m_n(g)$ pour tout entier naturel n, les images par Ψ de tous les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ sont nulles donc Ψ est nulle, c.q.f.d.

13. Soit $(P_n)_n$ une suite de polynômes convergeant uniformément vers $f-g$ sur $[0,1]$. Alors,

$$(f-g)P_n-(f-g)^2=(f-g)\big(P_n-(f-g)\big)\qquad\therefore\qquad\left\|(f-g)P_n-(f-g)^2\right\|_\infty\leqslant\|f-g\|_\infty\times\|P_n-(f-g)\|_\infty.$$

Ainsi, la suite de fonctions $\big((f-g)P_n\big)_n$ converge uniformément vers $(f-g)^2$ sur le segment $[0,1]$. On peut donc passer à la limite sous l'intégrale, ce qui donne $\displaystyle\int_0^1\big(f(x)-g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x=0$.

14. On en déduit que $f=g$, l'intégrale d'une fonction positive continue n'étant nulle que si cette fonction est nulle.

IV – Transformée de Fourier de la densité gaussienne

15. Dans toute cette partie, on considère la fonction f définie par

$$\forall(\xi,t)\in\mathbb{R}^2\colon f(\xi,t)=\mathrm{e}^{it\xi}\,\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{it\xi-t^2/2}.$$

Étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, elle est en particulier continue par rapport à ξ pour tout t et continue par morceaux par rapport à t pour tout ξ. De plus, pour tout $(\xi,t)\in\mathbb{R}^2$, $|f(\xi,t)|=\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}=\varphi(t)$, fonction intégrable ainsi qu'il a été prouvé à la question 2. Le théorème de continuité des intégrales à paramètre s'applique donc sur $\mathbb{R}$ et garantit que $\hat\varphi$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

16. Avec les notations de la question précédente,

i) pour tout $\xi\in\mathbb{R}$, la fonction $t\longmapsto f(\xi,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ainsi que le prouvent la domination réalisée à la question 16 et le théorème de comparaison ;
ii) on a déjà vu que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, la fonction $x\longmapsto f(\xi,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
iii) pour $\xi\in\mathbb{R}$, la fonction $t\longmapsto\dfrac{\partial}{\partial\xi}\big(f(\xi,t)\big)=it\,f(\xi,t)$ est continue (p.m.) ;
iv) pour tout $(\xi,t)\in\mathbb{R}^2$, $\big|it\,f(x,t)\big|=|t|\varphi(t)$, fonction intégrable d'après la question 2 (ou, directement, parce qu'elle est paire et admet sur $\mathbb{R}_+$ comme primitive la fonction $-\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, de limite finie (en l'occurrence, 0) en $\pm\infty$).

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique donc et montre que $\hat\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, l'expression de sa dérivée étant $\hat\varphi'(\xi)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\xi}\big(f(\xi,t)\big)\,\mathrm{d}t=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{it\xi}\,t\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

17. On réalise une intégration par parties.

$$\begin{aligned}\hat\varphi'(\xi)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{i\mathrm{e}^{it\xi}}_{u}\,\underbrace{t\mathrm{e}^{-t^2/2}}_{v'}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[i\mathrm{e}^{it\xi}\big(-\mathrm{e}^{-t^2/2}\big)\Big]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}i^2\xi\mathrm{e}^{it\xi}\big(-\mathrm{e}^{-t^2/2}\big)\,\mathrm{d}t\\&=0-\frac{\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{it\xi}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t=-\xi\hat\varphi(\xi).\end{aligned}$$

Ainsi, $\hat{\varphi}$ est solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre un $y'(\xi) + \xi y(\xi) = 0$.

18. Plus précisément, puisque $\hat{\varphi}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$, $\hat{\varphi}$ est l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'(\xi) + \xi y(\xi) = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$

L'équation différentielle s'intègre en $c\exp\left(\displaystyle\int -\xi\,\mathrm{d}\xi\right) = c\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}$, ce qui, avec $y'(0) = 1$, donne $c = 1$, soit $\hat{\varphi}(\xi) = \mathrm{e}^{\xi^2/2}$.

V – Le problème des moments sur $\mathbb{R}_+$

19. La fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$ est clairement continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et positive. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,

$$x^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} = \exp\left(\alpha \ln x - \frac{1}{2}(\ln(x))^2\right).$$

Quand x tend vers 0 par valeurs positives, comme vers $+\infty$, $|\ln x|$ tend vers l'infini, donc

$$\alpha \ln x - \frac{1}{2}(\ln(x))^2 \sim -\frac{1}{2}(\ln(x))^2 \xrightarrow[\text{ou } \substack{x\to 0\\ x>0}]{x\to+\infty} -\infty \qquad \therefore \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} = 0.$$

Pour $\alpha = -1$, cela montre que f est continue en 0. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha = n+3$, cela montre que $x^n f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathfrak{o}(1/x^2)$, donc que f admet un moment d'ordre n. Enfin,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{x} \underset{(u=\ln x)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi},$$

donc f est bien une densité sur $\mathbb{R}_+$.

Notons que le changement de variable pouvait aussi servir à obtenir l'existence des moments. On obtient en effet

$$\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{x} \underset{(u=\ln x)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{nx}\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

Pour $n > 0$, $\mathrm{e}^{nu}\mathrm{e}^{-u^2/2} = \mathrm{e}^{-u}\mathrm{e}^{-u^2/2+(n+1)u} \underset{u\to+\infty}{=} \mathfrak{o}\left(\mathrm{e}^{-u}\right)$, d'où l'existence du moment d'ordre n, un changement de variable bijectif conservant la nature d'une intégrale (on peut aussi prouver directement la convergence sans changement de variable).

20 & 21. Le même changement de variable $u = \ln x$ donne

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} x^n f(x) \sin\big(2\pi \ln(x)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} \sin\big(2\pi\ln(x)\big)\,\frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &\underset{(u=\ln x)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{nu}\mathrm{e}^{-u^2/2}\sin(2\pi u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{nu}\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{i2\pi u}\right)\mathrm{d}u = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i(2\pi-in)u}\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\hat{\varphi}(2\pi - in)\right) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{-(2\pi-in)^2/2}\right) = \mathrm{e}^{n^2/2-2\pi^2}\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{2i\pi n}\right) = 0. \end{aligned}$$

La question 2 assure la convergence des intégrales.

22. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $g_\alpha(x) = f(x)\big[1 + \alpha \sin\big(2\pi\ln(x)\big)\big]\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$. La fonction sinus étant bornée, on a $g_\alpha(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} \mathcal{O}\big(f(x)\big)$, donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g_\alpha(x) = f(0) = 0 = g_\alpha(0)$. Comme g_α est clairement continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est continue sur $\mathbb{R}_+$. Pout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} x^n g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^n f(x)\,\mathrm{d}x + \alpha\int_0^{+\infty} x^n f(x)\sin\big(2\pi\ln x\big)\,\mathrm{d}x = m_n(f) + \alpha I_n = m_n(f).$$

Il s'ensuit que g_α est une densité de probabilité dont les moments coïncident avec ceux de f à la condition *sine qua non* que la dernière condition d'une définition de densité soit vérifiée, c'est-à-dire que $g_\alpha \geqslant 0$, donc que $\alpha \in [-1, 1]$, ensemble infini non dénombrable.